完全可積分なsymplectic写像(非線型可積分系の研究の現状と展望)

前田, 茂

数理解析研究所講究録
822巻 1993年 176-184

完全可積分なsymplectic写像

前田茂 (Shigeru Maeda)

本報告では，当初Hamilton系の解を解析的に得るためにLiouvilleが導入した完全可積分性の概念をsymplectic写像にも導入できることを示し，ある条件下で完全可積分なsymplectic写像の（反復によって得られる）解点列がergodicな挙動をすることを示す．最後に，線形symplectic写像に関して，包合系をなす第１積分を写像からarithmeticに構成する方法を提示し，ほとんどの場合そのような保存量が自由度の数だけ構成できることを示す．

1. symplectic写像とその可積分性

現れる量はすべて滑らかとする．(M, ω)を2N次元symplectic多様体（ωはsymplectic構造）とし，以下，ΦでM上の１つのsymplectic写像を表すものとする．Hamilton力学の用語にならって，NをΦの自由度と呼ぶ．Φによる反復

$$x_{t+1}=\Phi(x_t) \quad (t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1}$$

は，M上にordinaryな差分方程式を定める．そして，(1)によって得られる任意の点列$\{x_t\}$をΦ（または差分方程式）の解と呼ぶことにする．

例1．よく現れるR上の2階差分方程式

$$x_{t+1}-2x_t+x_{t-1}=F(x_t) \tag{2}$$

は，新たな変数pを$p_t=x_t-x_{t-1}$によって導入すれば，

$$x_{t+1}-x_t=p_{t+1},\quad p_{t+1}-p_t=F(x_t) \tag{3}$$

という2元1階差分方程式となる．(3)はR^2上の写像

$$\Phi:(x,\ p)\rightarrow(x+p+F(x),\ p+F(x))$$

に伴う差分方程式で，ΦはFのいかんにかかわらずsymplec-tic構造$\omega=dp\wedge dq$を不変にするsymplectic写像である．

定義1．M上の関数fがΦの任意の解に沿って不変な値をとる，すなわち，$\Phi^*f=f$（$f(\Phi(x))=f(x)$）が成立するとき，fを保存量という．

symplectic写像に関して，後程使う既知の事実を幾つか掲げる[1]．

1.M上の（十分広い領域をcoverする）任意のsymplectic座標系において，差分方程式は次の形に表現できる．

$$q^i_{t+1}-q^i_t=\frac{\partial H}{\partial p_i}(q_t,\ p_{t+1}),\quad p_{i,t+1}-p_{i,t}=-\frac{\partial H}{\partial q^i}(q_t,\ p_{t+1}). \tag{4}$$

2．2つの保存量f,gに対して{f, g}もまた保存量となる．但し，{,}はPoisson括弧．

3．任意の保存量fに対して，fをHamiltonianとするHamiltonian vector場の生成するflowはΦと可換な写像を与える（symmetry性）．

2．完全可積分なsymplectic写像

まず，完全可積分なsymplectic写像の定義からから始める．

定義2．自由度Nのsymplectic写像は，次を満たすN個の保存量f_1, f_2, ..., f_Nを持つとき，完全可積分と呼ばれる．

(A) $\{f_i, f_j\}=0$ $(i, j=1, \ldots, N)$

(B) $df_1 \wedge df_2 \wedge \ldots \wedge df_N \neq 0$

注：自由度が1である(3)は保存量を1つ持てば完全可積分となる（そしてその保存量はenergy関数と呼ぶべき量である）．しかしながら，差分系ではHamilton系と事情が異なり，energy（に相当する量）すら存在しない場合がある[2]．

完全可積分なsymplectic写像に伴う差分方程式を可積分系と略称することにすれば，Liouvilleの定理の離散版は以下のように述べられる[3]．

定理1．可積分系は，あるsymplectic座標系上で線形系に表され，解の解析的表現を求積法によって得ることができる．

実際，各保存量$f_i(q, p)$を新運動量P_iとすれば，Lie-Carathéodoryの定理[4]から，conjugateな座標関数$Q^i(q, p)$を求積法によって構成できる．差分方程式をsymplectic座標系(Q^i, P_i)において(4)の形に表現すれば，直ちに

$$Q^i_{t+1}-Q^i_t=\frac{\partial H}{\partial P_i}(Q_t, P_{t+1}),\quad P_{i,t+1}-P_{i,t}=-\frac{\partial H}{\partial Q^i}(Q_t, P_{t+1})=0 \quad (5)$$

を得る．上でP_iは運動定数であったからHはPだけの関数になることに注意すると，次の解析的表現が得られる．

$$Q^i_t=m^i t+n^i,\quad P_i=c_i\quad (m^i, n^i, c_i：定数) \quad (6)$$

面白いのは，可積分系が有界運動をする場合であろう．離散系でも普通のHamilton系と同様の性質が見られる．f_i達のlevel setをM_cとかこう．

$$M_c=\{(q, p)\mid f_i(q, p)=c_i,\ c_i:\mathrm{const.}\}$$

M_cが連結，かつcompactの場合，Arnold[5]の議論がそのまま使えてMcはN次元torusとなる．

<u>定理2</u>．可積分系で上記Mcが連結，かつcompactとする．このとき，解は次のいずれかの挙動を示す．

(A) M_c上でdense,

(B) 有限点列,

(C) M_cの部分多様体上でdense，但し部分多様体は低次元torus上でdense.

この定理は，表現(6)を与える座標QがS^1の座標である（[5]に

よって保証される）ことを用いることで直ちに証明される．

例 2．例 1 で触れた(3)は，$F(x)=cx$　（c：定数）のとき，線形系となり，次の保存量をもつ可積分系である．

$$f(x,p)=p^2+cxp-cx^2 \tag{7}$$

$-4<c<0$ のとき，f の level set は qp-平面内で楕円となり有界．そして，解点列は，$\cos^{-1}(1+c/2)/(2\pi)$ が無理数のとき楕円上で dense，有理数のとき有限点列になる．

注：定理 2 の条件が満たされるとき，Φ の各解点列を積分曲線が interpolate するような Hamilton v.f. が存在する．例 2 の線形系でいえば，(7)が Hamilton v.f. の Hamiltonian である．

3．線形可積分系の斉 2 次保存量．

一般に，差分方程式の保存量を求めるのは難しい．しかし，線形系の場合，包合系をなすある種の斉 2 次保存量が arithmetic な手続きで求まることがわかっている．

A を与えられた（しかし，特定しない）symplectic 行列とし，次の差分方程式を考える．

$$x_{t+1}=Ax_t,\quad A\in Sp(N,R),\quad x\in R^{2N} \tag{7}$$

(7)の斉 2 次保存量

$$f_S(x)=x^TSx/2 \tag{8}$$

を問題にする．(8)の係数行列 S の全体がなす集合を Ω とかく．

$$\Omega=\{S\in M(2N,R)\ |\ [A,\ JS]=0,\ S^{T}=S\} \tag{9}$$

§1性質2によって，Ωは Poisson括弧

$$\langle S,\ T\rangle=SJT-TJS$$

によってLie環を作る．目的はAからΩの元を構成することであるが，我々はより扱い易い集合Ξを導入することにする．

$$\Xi=\{L\in M(2N,R)\ |\ [A,\ L]=0\} \tag{10}$$

2つの，行列を行列に移す線形写像

$$\eta(L)=JL^{T}J,\quad \sigma(L)=\{(JL)+(JL)^{T}\}/2=J(L+\eta(L))/2$$

を考えよう．証明抜きで次の事実を掲げる．

<u>補題1</u>．η，σに関して次の事実が成立する．

(A) ηはΞ上のinvolution map．従って，Ξはηの固有空間に直和分解される．

$$\Xi=\Theta\dotplus\Phi,$$

$$\Theta=\{L\in\Xi\ |\ \eta(L)=L\},\qquad \Phi=\{L\in\Xi\ |\ \eta(L)=-L\}$$

(B) Θは$sp(N,R)$の部分Lie環．

(C) σはΞからΩの上への写像で，$\ker\sigma=\Phi$．

<u>補題2</u>．$\sigma:\Theta\to\Omega$はLie環同相．

注：ΞからΘへの射影Pは$P(L)=(L+\eta(L))/2$．そして，$\sigma(L)=\sigma(P(L))$が成り立つ．

2つの補題から，我々はAと可換な行列で，Θ上へ射影した結果が1次独立となるようなものを特定すればよいことがわ

かる．Aと可換な行列のうち自明なのはAの多項式であるから，Ξの代わりにその部分空間

$$Ξ_1=\mathrm{span}\{I,\ A,\ A^2,\ A^3,\ ...\}$$

に注目しよう．

<u>補題3</u>．Aの最小多項式が固有多項式と一致するとき，$Ξ_1=Ξ$．

ほとんどのAに対して，Ξの代わりに$Ξ_1$を考慮するだけで，すべての斉2次保存量を得ることができる．しかも，そのとき得られる斉2次保存量は互いに可換である．

<u>定理3</u>．$\sigma(A),\sigma(A^2),...,\sigma(A^d)$が1次独立，$\sigma(A^{d+1})$がこれらに1次従属であるとする．このとき，初めのd個の行列は$\sigma(Ξ_1)=\sigma(P(Ξ_1))$の基底を与える．

そして，次元dは次で規定される．

<u>補題4</u>．Aの最小多項式ϕ_Aの次数をk，$d=\dim P(Ξ_1)$とする．このとき

(A) $k=2s+1 \ \rightarrow\ d=s$

(B) $k=2s$かつ$\phi_A(0)=-1 \ \rightarrow\ d=s-1$

(C) $k=2s$かつ$\phi_A(0)=1 \ \rightarrow\ d=s$

注．$d=0 \longleftrightarrow A^2=I$なので$A^2=I$である限り，上記の構成法で少なくとも1つ斉2次保存量が得られる．

<u>定理4</u>．Aの最小多項式が固有多項式と一致するとき，上記構成法で自由度の数だけ可換な斉2次保存量が得られ，従って完全可積分である．しかも，任意の斉2次保存量はこれらの1次結合で表わされる．

注：Aが定理4の仮定を満たさない場合でも線形系(7)は完全可積分であるが，保存量は別途導出せねばならない．

注：symplectic写像は，(4)以外に離散型変分原理から従うEuler difference方程式にも表現される．線形系(7)に対応する（離散型）LagrangianをL(q, v)($v_t = q_{t+1} - q_t$)とすると，σ(A)から導出される斉2次保存量は以下の通り．

$$-\left(v^i \cdot \frac{\partial L}{\partial v^i} - L\right) + \frac{1}{2} v^i \cdot \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

References

[1] S.Maeda, Canonical structure and symmetries for discrete systems, Math. Japon., 25, 4, 405-420, 1980.

[2] M.Bruschi, O.Ragnisco, P.M.Santini & Tu Gui=Zhang, Integrable symplectic maps, Physica D 49, 273-294, 1991.

[3] S.Maeda, Completely integrable symplectic mapping, Proc. Japan. Acad., 63A, 6, 198-200, 1987.

[4] C.Carathéodory, Variationsrechung und Partielle Differentialgleichunger Erster Ordung, Verlag und Druck von B.G.Teubner, 1935.

[5] V.I.Arnold, Mathematical methods for classical mechanics (Engl. Trans. by K.Vogtmann and A.Weinstein), Springer, 1978.

[6] S.Maeda, Quadratic conservatives of linear symplectic system, Proc. Japan. Acad., 64A, 2, 1988.

[7] R.Sato and S.Maeda, Conservation laws in continuous and discrete models, Conservation laws and symmetry, Kluwer, 135-174, 1990.